Implémentation du Calcul des Constructions Inductive/Presburger

Pierre-Yves Strub

FORMES, INRIA - Tsinghua Universisity - Beijing

Le Calcul des Constructions Inductives/Presburger

CoqMT: une implémentation de CIC/$\mathbb{N}$

Certification d'une procédure de décision (avec A. Mahboubi)

Une formalisation en Coq + Ssreflect

Génération de certificats

CIC/$\mathbb{N}$

Calcul des Constructions $^{\text{Inductive}}/_{\text{Presburger}}$:

- un Calcul des Constructions Inductives
- une procédure de décision pour l'arithmétique linéaire dans la conversion

Avantages:

- Plus d'automatisation
  - Preuves plus courtes...
  - ...mais pas forcément plus rapide à vérifier
- Programmer plus facilement avec les types dépendants

CIC/$\mathbb{N}$

- Modification de la règle de conversion:

  Une conversion entre 2 termes *arithmétiques*
  fera appel à une procédure de décision

- E.g., list $(x + (f\ y)) \equiv$ list $((f\ (y + 0)) + x)$

  Car $z = z' \Rightarrow x + z = z' + x$
  (avec $z \longrightarrow (f\ y)$, $z' \longrightarrow (f\ (y + 0))$)

CoqMT:

- Une modification du noyau de **Coq** permettant l'introduction dynamiquement de procédures de décision dans la conversion.

- On décrit ici
  - Comment charger de telles boites noires
  - Comment le noyau les utilise

Roadmap de l'ajout d'une théorie

Pour une intégration effective d'une procédure de décision:

1. Chargement, au sein du noyau, d'une *boite noire*:
   - Description de la théorie
   - Code effectif de l'algorithme de décision

2. Etablissement de *liens entre les définitions Coq et la boite noire* (e.g. mapping des symboles au premier ordre sur Coq)

Chargement d'une boite noire (1/2)

- Théorie $\mathcal{T} = (\Sigma, \mathcal{A}, \textbf{solve}) \rightarrow$ boîte noire déclarant auprès du noyau
  1. une sorte de travail (e.g. **nat**) $\rightarrow$ termes monosortés
  2. des symboles Σ (constructeurs ou définis) (e.g. $0_{[C,0]}$, $+_{[D,2]}$)
  3. une axiomatique $\mathcal{A}$ (e.g. $\forall xy, x + S(y) = S(x + y), \cdots$)
     - Soit via une AST interne
     - Soit via un langage pour la logique de premier ordre
  4. une fonction de décision **solve** (fonction **O'Caml**)

- Un contrat $\rightarrow$
  solve sait décider la *validité de clauses de Horn* pour $\mathcal{T}$.

Chargement d'une boite noire (2/2)

- Possibilité d'insérer plusieurs théories
  - Doivent travailler sur des sortes disjointes
  - Ne peuvent pas partager de variables

- Théories = code **O'Caml**
  $\Rightarrow$ peuvent être insérer dynamiquement via le système de chargement de code de **Coq** (Declare ML Module)

Lier une théorie (1/3)

- Une boite noire est *inerte* par défaut
  - Elle ne sait pas comment interagir avec les termes Coq
- Il faut
  - Lier les symboles au premier ordre sur des définitions Coq
  - Prouver que le mapping défini vérifie bien l'axiomatisation
- **Plusieurs liaisons possible sur une théorie**

Lier une théorie (2/3)

Pour Presburger, on peut e.g.

- Lier la sorte **nat** sur l'inductif

  $$\text{Inductive } \overline{\text{nat}} : \text{Type} := \overline{0} : \text{nat} \mid \overline{\text{S}} : \text{nat} \to \text{nat} .$$

- Lier les symboles **0** et **S** sur les constructeurs $\overline{0}$ et $\overline{\text{S}}$ de $\overline{\text{nat}}$.

- Lier le symbole **+** sur la définition **Coq** standard `Peano.plus` de l'addition.

Lier une théorie (3/3)

Le système demandera alors de vérifier, dans **Coq**, que:

- $\overline{\mathrm{nat}}$ est de type Type, et que les symboles liés repectent l'arité des symboles de $\mathcal{T}$ (e.g. $\overline{0} : \overline{\mathrm{nat}}$, $\overline{\mathrm{S}} : \overline{\mathrm{nat}} \to \overline{\mathrm{nat}}$).
- que les symboles **Coq** liés à des symboles constructeurs sont injectifs (ici, que $\overline{\mathrm{S}}$ est injectif).
- que les symboles liés à des symboles constructeurs ne sont pas confondus (ici, que $\overline{0}$ et $(\overline{\mathrm{S}}\, t)$ ne sont pas égaux pour tout t).
- que les axiomes de $\mathcal{T}$ sont bien respectés par les symboles liés. E.g., de $\forall x\, y, x + S(y) = S(x + y)$, il sera demandé

$$\text{forall (x y : nat), x } \overline{+} \text{ } (\overline{\mathrm{S}} \text{ y}) = \overline{\mathrm{S}}(\text{x } \overline{+} \text{ y})$$

Le noyau (1/2)

Initialement, le noyau décide de la conversion de 2 termes en

- Normalisant faiblement de tête
- Puis, en comparant les symboles de tête
  - **Égaux**, test de conversion sous les sous-termes appariés
  - **Sinon**, échec de la conversion

En cas d'échecs, le noyau vérifie maintenant

- qu'un des deux termes n'a pas un symbole lié en tête
  - **Si oui**, utilisation de la procédure de décision
  - **Sinon**, échec de la conversion

Le noyau (2/2)

E.g., $\overline{\text{list}}\ (\text{x}\ \overline{+}\ (\text{f y})) \equiv \overline{\text{list}}\ ((\text{f}\ (\text{y}\ \overline{+}\ \overline{0}))\ \overline{+}\ \text{x})$?

- L'ancienne conversion échoue sur

$$\text{x}\ \overline{+}\ (\text{f y}) \equiv (\text{f}\ (\text{y}\ \overline{+}\ \overline{0}))\ \overline{+}\ \text{x}$$

- Le nouveau noyau reconnait deux termes à chapeau algébrique
  - Il collecte les *aliens* (f y) et (f (y $\overline{+}\ \overline{0}$))
  - Ces aliens étant convertibles, il décide de les abstraire par une même variable $\Rightarrow x\overline{+}z = z\overline{+}x$.
  - Il envoie le but $x + z = z + x$ à la boite noire (qui répond posivitivement)
  - Les deux termes sont décrétés convertibles

Ce qui est fait

- Code de chargement et de liaison de théories
- Modification de la fonction de conversion
- Boite noire (simplexe) pour l'arithmétique linéaire
  - Liaison par défaut sur les entiers standards de Coq

- Dépot GIT: http://git.strub.nu/git/coqmt/

Ce qu'il reste à faire

- Meilleure communication entre Coq et les boites noires
  - Ne plus communiquer via des AST
  - Des liaisons non 1-à-1 (e.g. entiers binaires, multiplication par une constante...)
- Extraction des équations: quasiment fini
  - Le noyau essaie d'être incrémental le plus possible, mais...
  - ...ne donne pas cette possibilité aux boites noires
- Algorithmes de décision incrémentaux et à la Shostak (+ API entre boites noires et le noyau)

  Ex. (Shankar 2006):
  - simplex général incrémental
  - toutes les informations connues sur les égalités entre termes sont communiquées via une substitution

Ce qu'il reste à faire

- Conversion sous les match
  - Un algorithme t.q. (Shankar 2006) calcule partiellement et au maximum les termes (e.g. extrait le n max. t.q. $\mathrm{t} = \mathrm{S}^n\ \mathrm{u}$)
    $\Rightarrow$ réduction de `match t with ...`
- Gérer plus efficacement les *aliens*
  - Actuellement, comparaison 2 à 2
  - Utilisation de contre-modèles comme les solveurs SMT
- Prospectif: transformer l'algorithme top-down actuel en un algorithme de décision général où la $\beta\iota\zeta\delta$ est une théorie comme une autre. (Nelson/Oppen, Shostak)

Le Calcul des Constructions Inductives/Presburger

- CoqMT: une implémentation de CIC/$\mathbb{N}$

Certification d'une procédure de décision (avec A. Mahboubi)

- Une formalisation en Coq + Ssreflect
- Génération de certificats

Deux approches pour la certification

- Procédure de décision certifiée (e.g. obtenue par extraction)
  - On vérifie *a priori* toutes les exécutions
- Procédure de décision générant un certificat
  - On vérifie *a posteriori* après chaque exécution

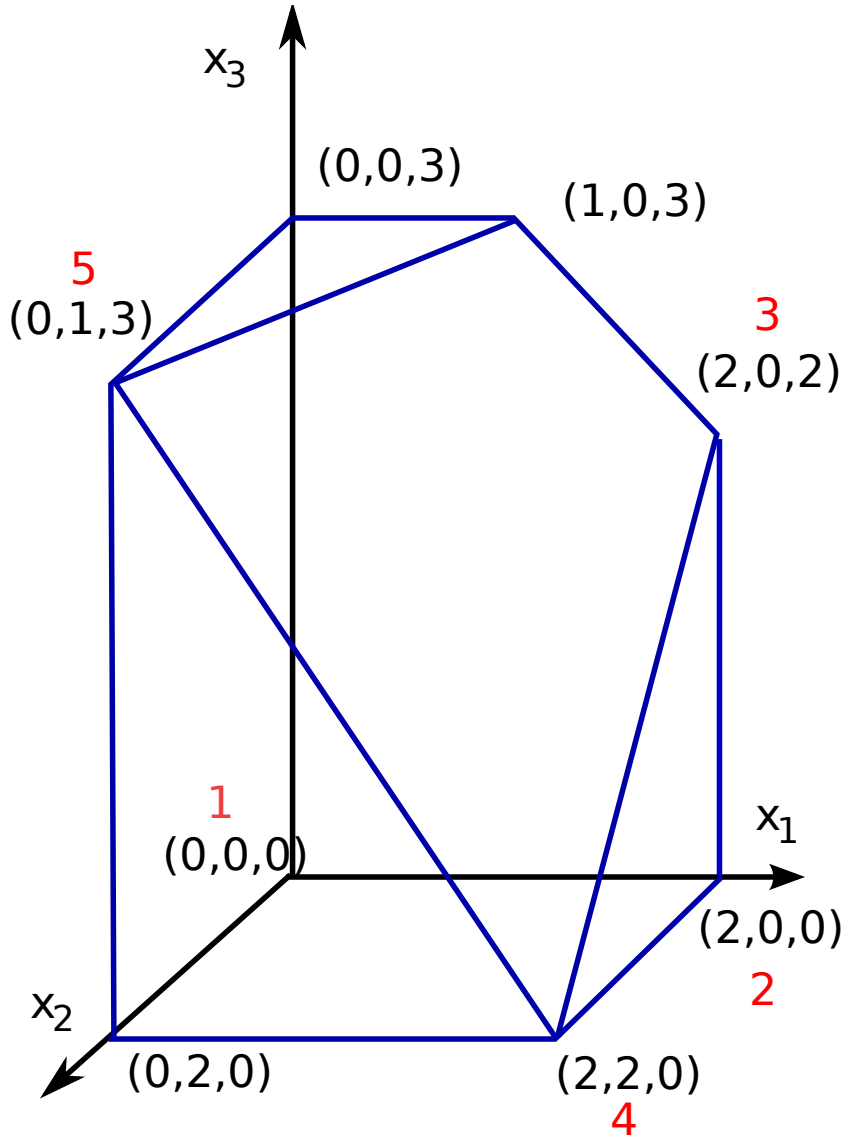
Nous nous intéressons ici à la
certification de l'algorithme du simplexe

Le simplexe (1/2)

Problème d'optimisation d'une fonction linéaire
sous des contraintes linéaires de satisfiabilité

- Peut servir de base à l'élaboration d'une boite noire intégrable à notre nouvelle version de Coq.
- Nous avons étudié
  - La version certifiée
  - La version avec génération de certificat

Le simplexe (2/2)



Le Calcul des Constructions Inductives/Presburger

CoqMT: une implémentation de CIC/$\mathbb{N}$

Certification d'une procédure de décision (avec A. Mahboubi)

Une formalisation en Coq + Ssreflect

Génération de certificats

Une formalisation en Coq + Ssreflect (1/2)

- Ce que nous utilisations:
  - Ssreflect (équipe Mathematical Components)
  - Bibliothèque pour l'algébre linéaire
    (Sidi Ould Biha, équipe M.C.)

- Ce que nous avons formalisé:
  - Anneaux et corps ordonnés
  - Un peu de convexité (sur les polytopes)
  - Correction des pas de l'algorithme d'optimisation
  - Correction des conditions d'arrêt

Une formalisation en Coq + Ssreflect (2/2)

- Ce que nous n'avons pas formalisé:
  1. Dualité
  2. Théorie générale de la convexité (Krein-Milman, ...)
  3. Terminaison (Bland's rule, ...)
  4. Initialisation (méthode des 2 phases, ...)

- Les points (3) et (4) sont nécessaires pour l'obtention d'un algorithme certifié.

Le Calcul des Constructions Inductives/Presburger

CoqMT: une implémentation de CIC/$\mathbb{N}$

Certification d'une procédure de décision (avec A. Mahboubi)

Une formalisation en Coq + Ssreflect

Génération de certificats

Notre approche

Adapté l'approche des solvers SMT pour la décision de l'arithmétique linéaire, dans le cas où l'on optimise la fonction constante.

"A fast Linear-Arithmetic Solver for DPLL(T)"
B. Dutertre-L. de Moura (CAV'06)

Roadmap

- Effectuer les calculs en dehors du système de preuves
- Fournir un témoin ou certificat
- Vérifier ce certificat dans le système de preuves

Comment ça marche ?

- S'il existe une solution
  - On calcule cette solution en dehors de Coq
  - Coq vérifie que cette solution vérifie les contraintes initiales
    - Cette vérification est donc faite par du calcul certifié
- S'il n'existe pas de solution
  - On calcule, en dehors de Coq, une combinaison linéaire inconsistante de l'ensemble initial de contraintes
  - Coq vérifie l'inconsistence
    - Cette vérification est simple et utilise seulement quelques lemmes d'arithmétiques

Un exemple

Du système:

$$\begin{cases} x+y & \geq & 0 & (e_1) \\ x & \leq & -1 & (e_2) \\ y & \leq & -1 & (e_3) \end{cases}$$

on obtient:

$$(e_1) \quad 0 \leq x+y \leq -2 = (-1)+(-1) \quad (e_2)+(e_3)$$

ce qui est absurde:

$$0 \leq -2$$

Le certificat (cas insatisfiable)

Le certificat (pour le cas insatisfiable) est de la forme:

- Une liste de coefficients (combinaison linéaire)
- Un énoncé absurde de la forme $a \leq b \wedge b < a$

Pour vérifier ce certificat, nous avons besoin de:

- Calcul: l'énoncé absurde n'utilise que des termes clos
- Vérifier une combinaison linéaire d'inéquations
- Utiliser la transitivité de l'ordre

Nombre linéaire de pas de déduction + Calcul au sein de Coq

Ce qui est fait

- Un algorithme du simplexe en O'Caml
  - Non totalement optimisé ?
  - Calcul en arithmétique exacte (rationnelle et entière)
  - Utilisation des coupures de Gomory (arithmétique entière)
  - Gestion des inégalités larges et strictes
  - Sait générer soit le témoin, soit le certificat de non-satisfiabilité

  - Intégration au sein de `micromega`